Vestibular INVERNO 2010 UEM

Prova 3 – Matemática

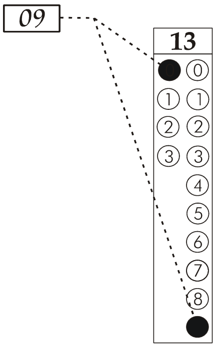
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS - PROVA 3

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 1

MATEMÁTICA

Rascunho

Questão 01

Uma pesquisa feita entre 1.200 alunos de um colégio, sobre a área que pretendem seguir, obteve os seguintes dados:

	Homens	Mulheres
Exatas	300	100
Biológicas	200	400
Humanas	100	100

Se um desses alunos é escolhido ao acaso, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A probabilidade de o aluno escolhido ser um rapaz que pretende seguir a área de exatas é de $\frac{1}{2}$.

02) Se o aluno escolhido pretende seguir a área de biológicas, a probabilidade de ser uma moça é de $\frac{2}{3}$.

04) A probabilidade de o aluno escolhido ser um rapaz ou alguém que pretenda seguir a área de humanas é de $\frac{7}{12}$.

08) A probabilidade de o aluno escolhido ser alguém que pretende seguir a área de exatas é de $\frac{1}{3}$.

16) Se o aluno escolhido pretende seguir a área de humanas, a probabilidade de ser um rapaz é de $\frac{1}{3}$.

Questão 02

Considerando os números naturais capícuas, também denominados palíndromos, de quatro algarismos, isto é, os números do tipo *abba* que podem ser lidos da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, da mesma forma, assinale o que for **correto**.

01) No sistema decimal, todo número *abba*, com algarismos a e b em {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, pode ser escrito como $1001 \times a + 110 \times b$.

02) No sistema decimal, todo número capícua de quatro algarismos é divisível por 11.

04) O número decimal 9, quando representado no sistema de numeração de base 2, cujos algarismos pertencem a {0, 1}, é capícua.

08) O número $(2112)_3$, na base 3, quando representado na base 10, é divisível por 3.

16) O número $(abba)_n$, na base n, $n > 1$, quando representado na base 10, é múltiplo de $n + 1$.

GABARITO 1

Questão 03

Considerando o polinômio $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$, em que os coeficientes *a*, *b* e *c* são números reais, assinale o que for **correto**.

01) Sabendo que $i^2=-1$, se $x=i$ é uma solução de $p(x)=0$, então $a=c$ e $b=1$.

02) Se $a=-3$ e $c=8$ e se a equação $p(x)=0$ possui três raízes reais distintas em progressão geométrica de razão $q=-2$, então $b=-6$.

04) Se $c=0$, então $p(x)=0$ possui três raízes reais.

08) Se $a=b=0$, então $p(x)=0$ possui três raízes reais iguais, qualquer que seja a constante real *c*.

16) Se $x=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$ é um zero de $p(x)$, então $q(x)=x^2-2x\cos\theta+\cos 2\theta$ é um de seus fatores, para qualquer θ real.

Questão 04

Considerando o número complexo $z_\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha\ i$, em que α é uma constante real tal que $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e $i^2=-1$, assinale o que for **correto**.

01) Qualquer ponto do primeiro quadrante ou do segundo quadrante do plano complexo representa z_α para algum α.

02) Para qualquer α, a parte real do número complexo $(z_\alpha)^2$ é um número real negativo.

04) Se $|z_\alpha|=1$, então $\alpha=0$.

08) $\dfrac{1}{z_{\frac{\pi}{4}}}=z_{-\frac{\pi}{4}}$.

16) $(z_{\frac{\pi}{4}})^4=-7-4\sqrt{2}\ i$.

Rascunho

Questão 05

Em um determinado conjunto de fichas coloridas, existem seis cores distintas. Algumas fichas desse conjunto serão distribuídas em um tabuleiro quadrado dividido em 36 quadrados iguais, numerados de 1 a 36 e dispostos em 6 linhas e 6 colunas. Cada quadrado poderá ficar vazio ou conter no máximo uma ficha. Sobre o exposto, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se após a distribuição das fichas, nenhum quadrado ficou vazio, existem 6^{36} formas distintas de fazer a distribuição.
02) Existem 7^{36} formas distintas de fazer a distribuição das fichas no tabuleiro.
04) Se forem distribuídas somente seis fichas de uma mesma cor, de forma que haja uma única ficha em cada linha e em cada coluna, teremos 6! distribuições distintas.
08) Escolhidas duas cores distintas para as fichas, ao distribuí-las de forma que haja uma única ficha em cada linha e em cada coluna, teremos 12! distribuições distintas.
16) Se escolhermos fichas de uma única cor para preencher uma das diagonais e todas as outras posições forem preenchidas com fichas de uma mesma cor, distinta da cor da diagonal escolhida, então temos 30^5 formas distintas de preencher o tabuleiro.

Questão 06

Considerando S o sistema de equações lineares $\begin{cases}(1+\operatorname{sen}\alpha)x+(\cos\alpha)y=2\\ -(\cos\alpha)x+(\operatorname{sen}\alpha)y=1\end{cases}$, em que α é uma constante real e x e y são as incógnitas reais, assinale o que for **correto**.

01) Se $\alpha\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, então o sistema S é possível e determinado.
02) Se $\alpha=-\frac{5\pi}{2}$, então o sistema S não possui solução.
04) O par ordenado $(1,0)\in\mathbb{R}^2$ é uma solução do sistema S para alguma constante real α.
08) O sistema S pode ter infinitas soluções, para alguma constante real α.
16) Se $\alpha=\frac{\pi}{4}$, então o par ordenado $(\frac{1}{1+\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2}-1)$ é solução do sistema S.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 07

Considerando o polinômio quadrático $p(x) = x^2 - ax - \frac{1}{4}$, em que a é uma constante real, assinale o que for **correto**.

01) Para algum valor real da constante a, a equação $p(x) = 0$ tem uma única solução real.

02) Se $a = \frac{3}{4}$, então $p(x) = (x-1)(x+\frac{1}{4})$.

04) Se a é um número inteiro, então os zeros de $p(x)$ diferem em um número inteiro.

08) Se $a = 1$, então o gráfico de $y = p(x)$, em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, é uma parábola que tem vértice em um ponto de abscissa negativa.

16) Qualquer que seja a constante real a, se x_1 e x_2 são as raízes da equação $p(x) = 0$, então $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}$ é um número inteiro negativo.

Questão 08

Considerando C_1 a circunferência de centro em um ponto O e raio r cm; considerando o retângulo *ABCD*, inscrito em C_1, de modo que o ângulo $A\widehat{O}B$ meça 150°; considerando o losango *MNPQ* cujos vértices são pontos médios dos lados do retângulo *ABCD* e considerando a circunferência C_2 inscrita no losango *MNPQ*, assinale o que for **correto**.

01) A medida do maior lado do retângulo *ABCD* é maior do que $2r$ cm.

02) A região limitada pelo retângulo *ABCD* preenche menos do que 25% da região limitada pela circunferência C_1.

04) A medida do perímetro do losango *MNPQ* é a metade da medida do perímetro do retângulo *ABCD*.

08) O comprimento da circunferência C_2 mede $\frac{\pi r}{2}$ cm.

16) A área da coroa circular limitada pelas circunferências C_1 e C_2 mede $\frac{15}{16}\pi r^2$ cm^2.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 09

Se θ é a medida em radianos de um arco em que $\sec\theta - tg\theta = 2$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) $\sec\theta + tg\theta = \frac{1}{2}$.

02) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

04) $\sec\theta = -\frac{3}{4}$.

08) $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{5}{4}$.

16) $\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{3}{5}$.

Questão 10

Uma locadora de filmes possui a seguinte regra para cobrança de multa para devoluções com atraso: para cada item locado, cobra R$ 2,50 para o primeiro dia de atraso e, a partir do segundo dia, R$ 0,50 a mais para cada dia de atraso. O cliente **A** está com uma grande quantidade de itens em atraso e, no décimo quinto dia, faz o seguinte acordo com a locadora: paga a metade da multa e, a cada 5 dias, pagará a metade do montante da multa; e o valor de R$ 0,50 por dia de atraso continuará sendo cobrado. Baseado nessas informações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se n é o número de dias em atraso na entrega de um filme, a fórmula $M(n) = 0,5n - 2,5$ fornece o valor da multa a ser paga em reais.

02) Se uma multa referente a um único filme foi paga com uma nota de R$ 50,00 e o cliente recebeu de troco o equivalente ao triplo da multa, esse cliente estava com 21 dias de atraso.

04) Em relação ao cliente **A**, após 30 dias de atraso, sua dívida era menor que R$ 3,00 por cada filme em atraso.

08) Em menos de 60 dias, o cliente **A** pagará toda a sua dívida.

16) Para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, o termo $5m$ fornece o dia de cada pagamento do cliente A, a partir do 15° dia de atraso. A fórmula $\frac{19}{2^{m+1}} + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$ fornece o valor em reais a ser pago para cada filme em atraso do cliente **A**.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 11

Assinale o que for **correto**.

01) $\log_3\left(3\sqrt{3\sqrt{3}}\right) = \dfrac{7}{4}$.

02) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}} > 6$.

04) $73+80+87+\ldots+199+206+213=3003$.

08) $\dfrac{1}{\sqrt{100-\sqrt[3]{10}}} < \dfrac{1}{10}$.

16) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} > \dfrac{3}{4}$.

Questão 12

Um retângulo *R*, de lados de medidas inteiras *a* cm e *b* cm, é dividido de modo a formar uma malha de quadrados de lado medindo 1 cm. Um raio de luz entra no retângulo *R* por um dos vértices, na direção da bissetriz do ângulo reto. Ao atingir o outro lado do retângulo *R*, esse raio é refletido e segue refletindo-se cada vez que toca em um lado do retângulo *R*. O raio de luz sai do retângulo *R* ao atingir um de seus vértices. O número inteiro positivo *N* de quadrados da malha que o raio de luz atravessa, desde a sua entrada até a sua saída, é o mínimo múltiplo comum entre *a* e *b*. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

01) Se R é um quadrado de área medindo $1\,\text{m}^2$, então $N=100$.
02) Se $a=10\,\text{cm}$ e $b=23\,\text{cm}$, então $N=230$.
04) Se $a=100\,\text{cm}$ e $b=240\,\text{cm}$, então $N=24.000$.
08) Se o raio de luz atravessa todos os quadrados da malha, então o maior divisor comum entre *a* e *b* é 1.
16) Se $N=30$, então os lados do retângulo *R* medem 6 cm e 5 cm.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 13

A reta r forma um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos com o eixo dos x, em um sistema cartesiano xOy, e intercepta a circunferência C de equação $x^2 + y^2 = 4$ nos pontos A e B. Se $A = (-2,0)$ e $O = (0,0)$, e a unidade métrica utilizada é o centímetro, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A distância de A a B mede $\sqrt{3}$ cm.

02) A área do triângulo OAB mede $\sqrt{3}$ cm^2.

04) A reta r divide o círculo delimitado por C em duas regiões. A área da menor região mede 1 cm^2.

08) A área do setor circular determinado por A e B mede $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$ cm^2.

16) A distância de O à reta r mede 1 cm.

Questão 14

Considerando as funções reais de uma variável real *f*, *g* e *h*, definidas por $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2}$, $g(x) = \log_2\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ e $h(x) = \frac{|x|}{x}$, assinale o que for **correto**.

01) O domínio da função *f* é o intervalo $[-1, +\infty)$.

02) $(g \circ h)(x) \in [-1, 1]$ para todo x real diferente de zero.

04) $(h \circ f)(x) = 1$ qualquer que seja x real para o qual a função composta $h \circ f$ esteja definida.

08) $(f \circ h)(x) = 0$ para todo x real negativo.

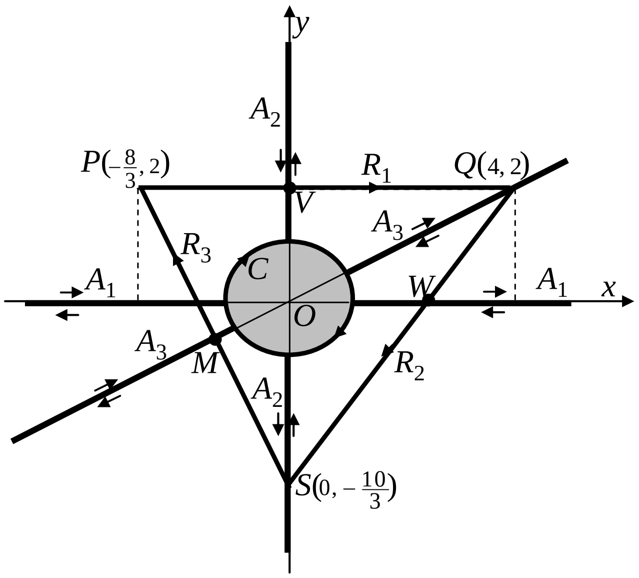
16) $(f \circ g)\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 15

Em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, considere o mapeamento de uma pequena área em torno de uma praça circular de lazer, em que constam somente as principais vias de tráfego de automóveis. As ruas têm um único sentido de percurso, enquanto as avenidas têm dois sentidos. A unidade de comprimento padrão do mapa mede $1\,\text{cm}$ e corresponde a uma distância real de 10.000 cm. O centro da praça é a origem do sistema. A rua C, que circunda a praça, é a circunferência de centro na origem e raio $1\,\text{cm}$, cujo sentido de percurso é o sentido horário. As ruas R_1, R_2 e R_3 são determinadas pelos pontos $P(-\frac{8}{3},2)$, $Q(4,2)$ e $S(0,-\frac{10}{3})$, como segue: a rua R_1 tem direção e sentido do segmento de P a Q; a rua R_2 tem direção e sentido do segmento de Q a S; e a rua R_3 tem direção e sentido do segmento de S a P. As avenidas A_1 e A_2 são os eixos dos x e dos y, respectivamente, e a avenida A_3 está localizada sobre a reta de equação $y=\frac{1}{2}x$.



Considerando que $\frac{1}{3}\cong 0,33$, $\sqrt{5}\cong 2,24$, $\pi\cong 3,14$ e o exposto acima, assinale o que for **correto**.

01) As retas que contêm as ruas R_2 e R_3 têm, respectivamente, as seguintes equações $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$ e $y=-2x-\frac{10}{3}$.

02) O triângulo PQS é escaleno.

04) Um motorista percorre cerca de $966\,\text{m}$ para ir, de carro, usando as vias do mapa, do ponto Q ao ponto médio M do segmento $\overline{PS}$, sem passar pela rua C.

08) A reta que contém a avenida A_3 contém a bissetriz do ângulo $P\widehat{Q}S$.

16) Para fazer, de carro, o percurso do cruzamento da rua R_1 com a avenida A_2 (ponto V), até o cruzamento da rua R_2 com a avenida A_1 (ponto W), trafegando por um trecho da rua C, um motorista sempre percorre mais de $500\,\text{m}$.

Questão 16

Assinale o que for **correto** para quaisquer matrizes A e B quadradas de ordem 2 e para qualquer número real k.

01) $\det(kA) = k^2 \det A$.

02) $\det(A^2) = (\det A)^2$.

04) Se A e B são matrizes inversas uma da outra, então $(A+B)^2 = A^2 + 2I_2 + B^2$, em que I_2 indica a matriz identidade de ordem 2.

08) $(AB)^2 = A^2B^2$.

16) Se A é uma matriz invertível, então $A + A^{-1} = 0_{2\times 2}$, em que $0_{2\times 2}$ indica a matriz nula.

Questão 17

Considerando uma peça maciça de granito cujo formato é o de um tetraedro regular de aresta medindo 12 cm, assinale o que for **correto**.

01) A altura de qualquer face da peça mede $6\sqrt{3}$ cm.

02) A área total da superfície da peça mede 288 cm^2.

04) A altura da peça mede $4\sqrt{6}$ cm.

08) A medida do volume da peça é menor do que 144 cm^3.

16) Um corte plano da peça produz uma seção triangular com um vértice no vértice do tetraedro, com o lado oposto a esse vértice paralelo a um lado da base contendo o baricentro da base. Esse corte divide a peça em duas peças cujos volumes estão a uma razão igual a 2/3.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 18

Um quadrilátero convexo $ABCD$ tem ângulos retos nos vértices C e D, e as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são iguais. Se E é um ponto qualquer do segmento $\overline{AB}$, distinto de A e de B, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Os ângulos $D\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}C$ são ângulos retos.
02) A medida de $\overline{AB}$ é igual à medida de $\overline{CD}$.
04) A medida da área do triângulo CDE é igual à soma das medidas das áreas dos triângulos ABC e BCD.
08) A medida da área do triângulo CDE é igual à metade da medida da área do quadrilátero $ABCD$ para qualquer posição do ponto E no segmento $\overline{AB}$.
16) Se a medida de $\overline{AE}$ é igual à medida de $\overline{EB}$, então a medida da área do triângulo EBD é um quarto da medida da área do quadrilátero $ABCD$.

Questão 19

Considerando os números $a = 101^{50}$ e $b = 99^{50} + 100^{50}$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) a é maior do que b.
02) a é um número par.
04) b é um número par.
08) $a - b$ é um número par.
16) a é um número divisível por 17.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 20

Um reservatório de água tem a forma de um tronco de cone circular reto de bases paralelas, em que o raio da base menor mede $1{,}5$ m, o raio da base maior mede 2 m e a distância entre a base menor e a base maior é de 2 m. O reservatório encontra-se suspenso, e a base menor, paralela ao solo, está mais próxima a este do que a base maior. A distância da base menor ao solo é de 8 m. Considere as seguintes informações: S é o cone que contém o tronco, V é o vértice de S, C_1 é o centro da base menor, C_2 é o centro da base maior, e A é um ponto qualquer fixado na circunferência da base maior. Considerando essas informações, que a quantidade de água dentro do reservatório tem 1 m de profundidade e que $\pi \cong 3{,}14$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A distância de V até a base menor é de 6 m.

02) O volume do cone S é de 32π m^3.

04) Se P é o ponto onde a reta $\overleftrightarrow{AV}$ intercepta o solo e Q é o ponto onde a reta $\overleftrightarrow{C_1V}$ intercepta o solo, a distância entre P e Q é de 1 m.

08) A superfície da água contida no reservatório determina um círculo de diâmetro igual a $3{,}5$ m.

16) O volume de água no reservatório é de $\dfrac{127\pi}{48}$ m^3.

Rascunho

GABARITO 1

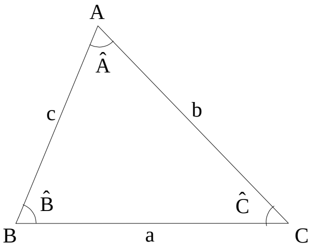
MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\cos(y) \pm \text{sen}(y)\cos(x)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y)$

$$\text{tg}(x \pm y) = \frac{\text{tg}(x) \pm \text{tg}(y)}{1 \mp \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$$



Lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Lei dos cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$

Análise Combinatória

$P_n = n!$

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$$

Geometria Plana e Espacial

Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$

Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$

Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$

Área do círculo: $A = \pi R^2$

Área lateral do cilindro: $A = 2\pi Rh$

Área do setor circular: $A = \dfrac{R^2\alpha}{2}$

Área lateral do cone: $A = \pi RG$

Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$

Área total do tetraedro regular: $A = a^2\sqrt{3}$

Volume do paralelepípedo: $V = B.h$

Volume do cubo: $V = a^3$

Volume do prisma: $V = B \cdot h$

Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$

Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$

Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Progressões

Progressão Aritmética (P. A.):

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Progressão Geométrica (P. G.):

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, |q| < 1$$

Geometria Analítica

Ponto Médio do segmento de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$: M

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2}|D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$:

$$d_{P,r} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Conversão de unidades

$1\ m^3 = 1000\ \ell$