COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2008 vestibular nacional UNICAMP

2ª Fase — Matemática

MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar candidatos com boa capacidade de leitura de textos, tabelas e gráficos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Não se deseja que o candidato decore centenas de fórmulas, mas que use seus conhecimentos e sua experiência para resolver questões que, muitas vezes, abrangem mais de um tópico de matemática e fogem do padrão de exercícios apresentados nos cursinhos. Também se espera dos candidatos que resolvam questões relativas a assuntos de seu cotidiano, formulando modelos matemáticos que expressem corretamente os problemas apresentados.

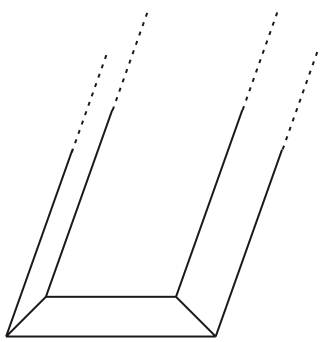
Ao comentar a prova de matemática do vestibular 2008, tivemos a preocupação de apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a’** ou **b’**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Outras formas de resolver os problemas aparecem nos exemplos acima da média reproduzidos neste caderno. Já os exemplos abaixo média ilustram erros comuns cometidos pelos candidatos. Dicas sobre o que não se deve fazer ao responder às questões da prova de matemática são dadas inclusive com base nos exemplos acima da média, para mostrar aos candidatos os deslizes que eles devem evitar ao responder às questões.

Instruções Gerais:

- Indique claramente as respostas dos itens de cada questão, fornecendo as unidades, se for o caso.
- Apresente de forma clara e ordenada os passos utilizados na resolução das questões. Expressões incompreensíveis, bem como respostas não fundamentadas, não serão aceitas.
- Ao apresentar a resolução das questões, evite textos longos e dê preferência às fórmulas e expressões matemáticas.
- Não use aproximações para os valores de π ou e.
- Toda a resolução das questões deve ser a caneta, não apenas as respostas numéricas.

1.

Em uma estrada de ferro, os dormentes e os trilhos são assentados sobre uma base composta basicamente por brita. Essa base (ou lastro) tem uma seção trapezoidal, conforme representado na figura abaixo. A base menor do trapézio, que é isósceles, tem 2 m, a base maior tem 2,8 m e as arestas laterais têm 50 cm de comprimento. Supondo que um trecho de 10 km de estrada deva ser construído, responda às seguintes questões.



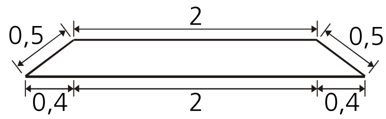
a)
Que volume de brita será gasto com o lastro nesse trecho de ferrovia?

b)
Se a parte interna da caçamba de um caminhão basculante tem 6 m de comprimento, 2,5 m de largura e 0,6 m de altura, quantas viagens de caminhão serão necessárias para transportar toda a brita?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O trapézio em questão tem 2,8 m de base maior e 2 m de base menor. A diferença entre as bases é de 0,8 m, o que, dada a simetria do trapézio, implica uma diferença de 0,4 m de cada lado, como mostra a figura ao lado. Dado que a aresta lateral tem 0,5 m, a altura do trapézio vale $\sqrt{0,5^2 - 0,4^2} = 0,3$ m.



Assim, a área do trapézio é igual a (2,8 + 2)x0,3/2 = 0,72 m^2 e o volume de brita para construir 10000 m de estrada é 0,72x10000 = 7200 m^3.

Resposta: Serão gastos 7200 m^3 de brita.

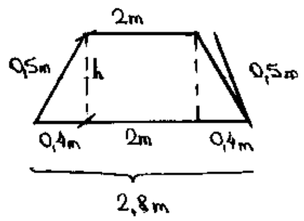
b) **(2 pontos)**

A caçamba do caminhão tem um volume interno de 6x2,5x0,6 = 9 m^3. O número de viagens é igual a 7200/9 = 800.

Resposta: São necessárias 800 viagens de caminhão.

Exemplo Acima da Média

a)



Por pitágoras

$(0,5)^2 = (0,4)^2 + h^2$

$h^2 = 0,09$

$\boxed{h = 0,3m}$

$A_{base} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$

$A_{base} = \frac{(2,8+2) \cdot 0,3}{2}$

$A_{base} = \frac{4,8 \cdot 0,3}{2} = 2,4 \cdot 0,3$

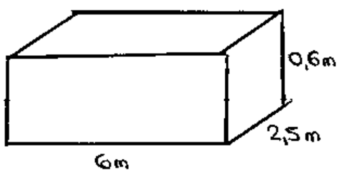
$\boxed{A_{base} = 0,72m^2}$

$Vol = A_{base} \cdot H$

$Vol = 0,72 \cdot 10.000 = 7.200 \ m^3$

O volume gasto será de 7.200 m^3

b)



$V = Ab \cdot h$

$V = 6 \cdot 2,5 \cdot 0,6$

$V = 15 \cdot 0,6 = 9 m^3$

1 caminhão — 9m^3

x — 7.200m^3

$x = \frac{7200}{9}$

Serão necessárias 800 viagens

Exemplo Abaixo da Média

a) Volume de 1 lastro → (Área do trapézio x aresta)

$\rightarrow A_T = \frac{(B+b).h}{2} \rightarrow A_T = \frac{(2,8+2).0,4}{2} \rightarrow \boxed{A_T = 0,96\ m^2}$

Volume ⇒ 0,96 x 0,5 ⇒ Volume do lastro = $\boxed{0,48\ m^3}$

1 lastro — 0,48 m³ 10 km: $\frac{10000\ m}{2,8\ m}$ → 357 lastros serão necessários

357 lastros — x

$\boxed{x = 171,36\ m^3}$

O volume de brita gasto será de 171,36 m³.

b) Volume da caçamba = 6 x 2,5 x 0,6 ⇒ $\boxed{V_C = 9\ m^3}$

171,36 | 9
81 19,04 → 20 viagens
0

O caminhão terá de fazer 20 viagens para transportar toda brita.

Comentários

Esta é uma questão muito simples de geometria, que envolve conceitos básicos como a determinação de um dos lados de um triângulo retângulo e o cálculo de áreas e volumes bastante conhecidos. No exemplo acima da média, todas as informações necessárias à resolução do problema são apresentadas de forma clara e sucinta. Por outro lado, no exemplo abaixo da média, o candidato não usou o teorema de Pitágoras para determinar a altura do trapézio, um erro bastante comum. Além disso, usou uma fórmula incompreensível para determinar o volume de brita. Erros na conversão de unidades necessária ao cálculo do volume também foram comuns.

2.

Uma passagem de ônibus de Campinas a São Paulo custa R$17,50. O preço da passagem é composto por R$ 12,57 de tarifa, R$ 0,94 de pedágio, R$ 3,30 de taxa de embarque e R$ 0,69 de seguro. Uma empresa realiza viagens a cada 15 minutos, sendo que o primeiro ônibus sai às 5 horas da manhã e o último, à meia-noite. No período entre o meio-dia e as duas horas da tarde, o intervalo entre viagens sucessivas é de 30 minutos.

a)
Suponha que a empresa realiza todas as viagens previstas no enunciado e que os ônibus transportam, em média, 36 passageiros por viagem. Qual o valor arrecadado pela empresa, por dia, nas viagens entre Campinas e São Paulo, desconsiderando as viagens de volta?

b)
Se a taxa de embarque aumentar 33,33% e esse aumento for integralmente repassado ao preço da passagem, qual será o aumento percentual total do preço da passagem?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Excetuando o horário de almoço, a empresa realiza quatro viagens por hora. Assim, entre 5 horas e 11h45, são feitas 7x4 = 28 viagens. Já entre 14h15 e 24 horas, são realizadas 10x4 = 40 viagens. Finalmente, entre 12 e 14 horas, são feitas apenas 5 viagens. Dessa forma, a empresa faz 28 + 40 + 5 = 73 viagens por dia.
Considerando que 36 passageiros são transportados em cada viagem, temos um total de 73x36 = 2628 passageiros transportados por dia. Uma vez que cada passagem custa R$ 17,50, a empresa arrecada 2628x17,5 = R$ 45.990,00 por dia.

Resposta: A empresa arrecada R$ 45.990,00 por dia.

b) **(2 pontos)**
A taxa de embarque é de R$ 3,30. O aumento equivale a 3,30x0,3333 ≅ R$ 1,10. Com relação ao preço da passagem, o aumento corresponde a (1,10/17,50)x100 ≅ 6,3%.

Resposta: O aumento corresponderá a 6,3% do preço da passagem.

Exemplo Acima da Média

a)

Intervalo	Nº de viagens
5 ⊢ 12	28
12 ⊢ 14	4
14 ⊢ 24	41

Número total de viagens em um dia
$N = 28 + 4 + 41 \Rightarrow N = 73$
Total arrecadado em um dia
$T = 73 . 36 . 17,50 \Rightarrow T = R\$\ 45\,990,00$

b) 100% — 3,30
133,33% — x

$x = \dfrac{133,33 . 3,30}{100} \Rightarrow x = R\$\ 4,40$

A passagem passará a custar R$ 18,60. Assim o aumento percentual será dado por

100% — 17,50
x — 18,60

$x = \dfrac{18,60 . 100}{17,50} \Rightarrow x = 1,0628 . 100 \Rightarrow x = 106,28$

E assim o aumento será de 6,28%.

Exemplo Abaixo da Média

A) 1 viagem a cada 15 minutos
1ª viagem 5h última 24h ⇒ 4 viagens/hora
Das 12h às 14h a cada 30 minutos ⇒ 2 viagens/hora

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 73 viagens

1 passagem = R$ 17,50
Valor total arrecadado = (17,50) × 73 = R$ 1.277,50

S: { Valor arrecadado/dia viagens Campinas/São Paulo = R$ 1.277,50 }

B) Taxa de embarque
R$ 3,30 — 100%
x — 33,33%

$x = \dfrac{109,989}{100} = 1,09989 \cong R\$\ 1,10$

Passagem
17,50 — 100%
18,60 — x

$x = \dfrac{1860}{17,5}$

Comentários

Questão que trata de um assunto simples e cotidiano, e envolve contagem, operações com números decimais e cálculo de porcentagens. A contagem errada do número de viagens foi o que mais tirou pontos dos candidatos. O exemplo abaixo da média ilustra outros problemas comuns: apesar de contar corretamente o número de viagens, o candidato precisou enumerar o que acontecia a cada hora, o que consumiu um tempo precioso. Além disso, ao calcular o total arrecadado pela empresa, ele se esqueceu de considerar que os ônibus transportavam, em média, 36 passageiros por viagem, obtendo um resultado errado. Finalmente, o candidato não foi capaz de calcular o aumento percentual do preço da passagem.

3.

Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

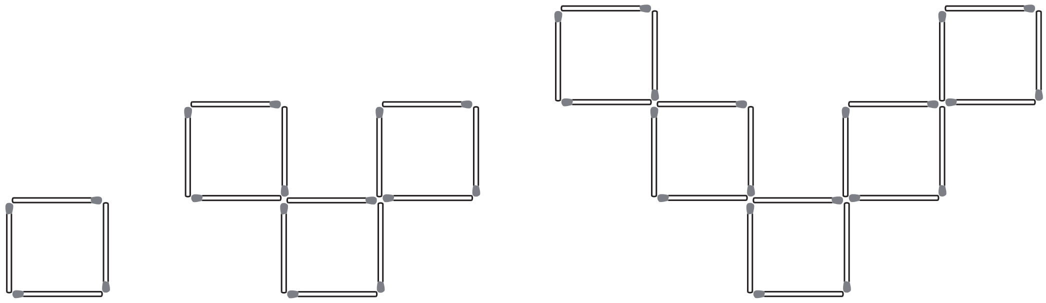


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a)
Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as figuras 1, 2 e 3, e que o número de fósforos utilizados para formar a figura n seja F_n. Calcule F_{10} e escreva a expressão geral de F_n.

b)
Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Na primeira figura, temos 1 quadrado, de modo que $F_1 = 4$. O número de quadrados da segunda e da terceira figuras é igual a 3 e 5, respectivamente, o que implica que $F_2 = 3x4$ e $F_2 = 5x4$. Assim, o número de quadrados da figura de ordem n deve ser $2n – 1$. Como cada quadrado é formado por 4 palitos, temos $F_n = 4(2n – 1)$.
Logo, $F_{10} = 4(2.10 – 1) = 76$.

Resposta: $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n – 4$.

a')
O número de palitos usados para construir as figuras forma uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 4 e que tem razão igual a 8. A fórmula do termo geral dessa progressão é $F_n = 4 + 8(n – 1)$.
Logo, $F_{10} = 4 + 8.(10 – 1) = 76$.

Resposta: $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n – 4$.

b) **(2 pontos)**
$F_1 + F_2 + ... + F_{50} = 8.(1 + 2 + ... + 50) – 4.50$. Logo, $F_1 + F_2 + ... + F_{50} = 8.50.51/2 – 200 = 10000$.

Resposta: São necessários 10000 fósforos para exibir as primeiras 50 figuras.

b') $F_1 + F_2 + ... + F_{50} = (F_1 + F_{50}).50/2$. Logo, $F_1 + F_2 + ... + F_{50} = (4 + 8.50 – 4).50/2 = 10000$.

Resposta: São necessários 10000 fósforos para exibir as primeiras 50 figuras.

Exemplo Acima da Média

a)

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
4.1	4.3	4.5	4.7	4.9	4.11	4.13	4.15	4.17	4.19

$F_{10} = 4.19$ palitos

$\boxed{F_{10} = 76 \text{ palitos}}$

Expressão geral de F_n:

$F_n = 4[n+(n-1)]$

$\boxed{F_n = F_1[n+(n-1)]}$

R F_{10} possui 76 palitos e a expressão geral de F_n é ~~Fn =~~ $F_n = [n+(n-1)]$.

b) $F_1; F_2, \ldots \ldots F_{25}; F_{26}; \ldots \ldots F_{49}; F_{50}$

4, 12, 196 + 204, 388, 396

400, 400, 400

$F_{50} = 4(50+49) = 396$

$F_{49} = 4(49+48) = 388$

$F_{26} = 4(26+25) = 204$

$F_{25} = 4(25+24) = 196$

$\therefore 400 \times 25 =$ nº fósforos para exibir concomitantemente todas as 1ªs 50 figuras

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 400 \\ \hline 10000 \end{array}$$

R: O número de fósforos necessários são 10.000.

Exemplo Abaixo da Média

a) Temos uma P.A. em que $a_1 = 4$ e $r = 8$

$F_{10} = F_1 + (n-1)r \Rightarrow F_{10} = 4 + (9).8 = 4.72 = 288$

Expressão geral: $F_n = 4 + (n-1).8$

b) Temos a soma dos 50 primeiros Termos desta PA

$a_{50} = 4 + 49.8 = 32.49 = 1568$

$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})50}{2} = \frac{(4+1568)50}{2} = \frac{1572.50}{2} = 25.1572 = 39300$

Resposta: Serão necessários 39300 palitos.

Comentários

Questão simples envolvendo progressão aritmética. No exemplo acima da média, sem se lembrar da fórmula da soma dos termos da progressão aritmética, o candidato resolveu o item **b** de forma brilhante. Ele somou os valores de F_1 e F_{50}, obtendo como resultado 400 palitos. Em seguida, repetiu o processo somando F_2 a F_{49}, F_3 a F_{49} e assim sucessivamente, constatando que existiam 25 conjuntos de 400 palitos, o que forneceu um total de 10000 palitos. No exemplo abaixo da média, o candidato errou duas vezes o mesmo tipo de conta, tratando 4 + 8x(n – 1) como se fosse 4x8x(n – 1). Curiosamente, este foi um erro comum. Muitos candidatos também confundiram progressão aritmética e progressão geométrica, obtendo resultados bastante diferentes do esperado.

4.

Dois atletas largaram lado a lado em uma corrida disputada em uma pista de atletismo com 400 m de comprimento. Os dois atletas correram a velocidades constantes, porém diferentes. O atleta mais rápido completou cada volta em exatos 66 segundos. Depois de correr 17 voltas e meia, o atleta mais rápido ultrapassou o atleta mais lento pela primeira vez. Com base nesses dados, pergunta-se:

a)
Quanto tempo gastou o atleta mais lento para percorrer cada volta?

b)
Em quanto tempo o atleta mais rápido completou a prova, que era de 10.000 metros? No momento em que o atleta mais rápido cruzou a linha de chegada, que distância o atleta mais lento havia percorrido?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
O atleta mais rápido ultrapassou o mais lento depois de correr 17,5 voltas em 66x17,5 = 1155 s.
Até aquele instante, o corredor mais lento havia corrido 16,5 voltas. Isso significa que o atleta retardatário faz cada volta em 1155/16,5 = 70 s.

Resposta: O atleta mais lento gastou 70s para completar cada volta.

b) **(2 pontos)**
Os 10000 m de prova equivalem a 10000/400 = 25 voltas. Assim, o corredor mais rápido gastou 25x66 = 1650 s para completar a prova.
No instante em que o primeiro atleta cruzou a linha de chegada, o corredor mais lento havia percorrido apenas 1650/70 ≅ 23,57 voltas ou cerca de 9428 m.

Resposta: O corredor mais lento havia percorrido aproximadamente 9428 m.

Exemplo Acima da Média

a) Como o atleta mais rápido ultrapassou o atleta mais lento pela primeira vez, depois de corre 17 voltas e meia, então o atleta mais lento correu 16 voltas e meia até ser ultrapassado pelo mais rápido e no momento da ultrapassagem o tempo dos dois atletas eram iguais, por isso:

	voltas	tempo volta	comprimento	total	tempo total
• atleta mais rápido:	17,5	66 s	400 m	7000 m	1155 s
• atleta mais lento:	16,5	x s	400 m	6600 m	16,5x

portanto $16{,}5\,x = 1155 \Rightarrow x = 70$ segundos (tempo de cada volta)

b) Para completar a prova era necessário percorrer 25 voltas

O atleta mais rápido completou a prova em: $25 \times 66 = 1650$ s
1650 segundos ou 27 min e 30 segundos.

Quando o atleta mais rápido cruzou a linha de chegada o atleta mais lento havia percorrido: $\frac{1650}{70} \cong 23{,}57$ voltas $\cong 9428$ m

Exemplo Abaixo da Média

a) atleta rápido = 17,5 x 400 m = 7000 m (espaço percorrido)
* 17,5 x 66 s = 1122 s (tempo total do espaço percorrido)
atleta Lento = 16,5 x 400 m = 6600 m (espaço percorrido)
O tempo total do atleta lento é de 1122 s igualmente ao atleta + rápido
Porém com uma volta a menos ou seja:
Cada volta do atleta lento Sera de: 68 s = 1122s / 16,5 = 68 s
Resp.: Portanto atleta Lento gastou com cada volta 68 segundos

B) Se 7000 — 1122 → Portanto: $x7\cancel{000} = 11220\cancel{000}$
10000 — x   x = 11220/7
atleta rápido → $\boxed{x \cong 1602\,s}$ aproximadamente 26,7 min.

Se quando atleta rápido → 7000 m — 6600 atleta lento
10000 m — x'
x'7 = 66000
x' = 66000/7
$\boxed{x' = 9428,5\,m}$

aproximadamente 9428,5 m terá percorrido o atleta lento

Comentários

Este problema envolve a comparação de duas taxas diferentes, representadas pelas velocidades dos corredores. No exemplo acima da média, a resposta está muito bem esquematizada, apesar de o candidato não mencionar as contas que fez para determinar o número de voltas da prova (10000/400 = 25) e para calcular a distância percorrida pelo corredor mais lento (23,57x400 ≅ 9428 m). Também houve excesso de texto na resposta ao item **a**. Já o exemplo abaixo da média mostra uma resolução do item **a** com erros tanto na multiplicação como na divisão. Dentre os candidatos que compreenderam o que pedia a questão, esse foi o motivo mais comum de perda de pontos. Felizmente, o item **b** desse exemplo está correto. Embora o candidato tenha começado a resolvê-lo utilizando o valor errado obtido no item anterior, ele desiste dessa estratégia e usa dados corretos para obter a distância solicitada, seguindo uma estratégia diferente daquela apresentada acima.

5.

Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (y) do peso em função de sua distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela abaixo. Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

a)
Determine os valores de a, b e c.

b)
Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
A tabela fornece valores de y e x. Substituindo esses valores na equação $y = ax^2 + bx + c$, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} a \;+\; b \;+\; c &= 2{,}0 \\ 4a + 2b + c &= 2{,}7\,. \\ 9a + 3b + c &= 3{,}2 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $a = -0{,}1$, $b = 1{,}0$ e $c = 1{,}1$.

Resposta: a = –0,1, b = 1,0 e c = 1,1.

b) **(2 pontos)**
Sabemos, agora, que $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}1$. Como o arremesso tem início no ponto $x = 0$, a distância alcançada pelo peso é igual ao valor de x tal que $y(x) = 0$, pois é nesse ponto que o peso toca o solo. Assim, precisamos resolver a equação $-0{,}1x^2 + x + 1{,}1 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-0{,}1)1{,}1}}{2(-0{,}1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1{,}44}}{0{,}2} = \frac{1 \pm 1{,}2}{0{,}2}\,.$$

Desprezando a raiz negativa, resta apenas $x = 2{,}2/0{,}2 = 11$ m.

Resposta: A distância percorrida pelo peso equivale a 11 m.

Exemplo Acima da Média

a) $\begin{cases} 2 = a + b + c & \cdot(-1) \\ 2{,}7 = 4a + 2b + c & + \\ 3{,}2 = 9a + 3b + c & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b + c \\ 0{,}7 = 3a + b & \cdot(-2) \\ 1{,}2 = 8a + 2b & + \end{cases} \Rightarrow$

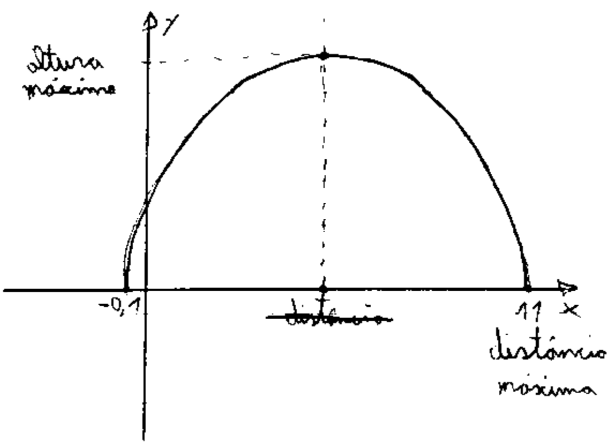
$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b + c \\ 0{,}7 = 3a + b \\ -0{,}2 = 2a \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} c = 1{,}1 \\ b = 1 \\ a = -0{,}1 \end{matrix}}$

b) $-0{,}1x^2 + x + 1{,}1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1{,}44$

$x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x' = -0{,}1$ | $x'' = 11$



R: O distância alcançada por esse peso foi 11 metros.

Exemplo Abaixo da Média

a) $\begin{cases} 2 = a + b + c \quad (\times -1) \\ 2{,}7 = 4a + 2b + c \quad + \\ 3{,}2 = 9a + 3b + c \quad + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}7 = 3a + b \quad (-2) \\ 1{,}2 = 8a + 2b \quad + \end{cases} \Rightarrow a = -1{,}1$

$1{,}7 = 3a + b$
$1{,}7 = 3(-1{,}1) + b$
$b = 5$

$2 = a + b + c$
$2 = -1{,}1 + 5 + c$
$c = -1{,}9$

B) $y = -1{,}1x^2 + 5x - 1{,}9$

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-5}{-2{,}2} \cong 2{,}2 \times 2 = 4{,}4$ m

Resp: A distância total é 4,4 m.

Comentários

Uma questão clássica, envolvendo a trajetória (parabólica) de um peso. Sua resolução exigia algum conhecimento de sistemas lineares e de funções quadráticas. A interpretação do gráfico da parábola também tinha alguma importância, já que muitos candidatos indicaram 12 m (a distância entre as raízes da equação y(x) = 0) como a distância percorrida pelo peso, ignorando o fato de o atleta ter efetuado o arremesso a uma altura de 1,1 m do chão. O exemplo acima da média mostra um gráfico aceitável da parábola, apesar de a raiz negativa da equação estar incorreta. O candidato também deixou de indicar explicitamente os números utilizados para determinar as raízes, o que seria aconselhável. O exemplo abaixo da média mostra erros de conta na resolução do item **a** e uma certa confusão entre distância máxima e altura máxima. Se o candidato tivesse feito um desenho, em lugar de apresentar uma fórmula decorada, talvez tivesse acertado a resposta do item **b**.

6.

Seja C o conjunto dos números (no sistema decimal) formados usando-se apenas o algarismo 1, ou seja C = { 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, ... }.

a)
Verifique se o conjunto C contém números que são divisíveis por 9 e se contém números divisíveis por 6. Exiba o menor número divisível por 9, se houver. Repita o procedimento em relação ao 6.

b)
Escolhendo ao acaso um número m de C, e sabendo que esse número tem, no máximo, 1000 algarismos, qual a probabilidade de m ser divisível por 9?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9. Logo, o menor número de C que é divisível por 9 é 111.111.111.
Para que um número seja divisível por 6 é preciso que ele seja par e que seja divisível por 3. Como nenhum número de C é par, esse conjunto não possui números divisíveis por 6.

Resposta: O primeiro número divisível por 9 é 111.111.111. Por outro lado, C não tem números divisíveis por 6.

b) **(2 pontos)**
Os números de C que são divisíveis por 9 são aqueles cujo número de algarismos é divisível por 9, ou seja, aqueles que têm 9, 18, 27, 36, ... algarismos. Esses números, se ordenados, formam uma progressão aritmética que tem termos inicial e final iguais a 9 e 999, respectivamente. Como o termo final da progressão pode ser escrito na forma $a_n = a_1 + (n - 1).r$, chegamos a $999 = 9 + (n - 1).9$. Logo, $n = 111$.
Naturalmente, C possui exatamente 1000 números com, no máximo, 1000 algarismos. Assim, a probabilidade de que o número m seja divisível por 9 é de 111/1000, ou 11,1%.

Resposta: A probabilidade de que m seja divisível por nove é igual a 111/1000, ou 11,1%.

b')
Se os números de C forem ordenados da forma habitual, aqueles que são divisíveis por 9 serão o 9º, o 18º, o 27º, e assim por diante. Observamos, portanto, que esses números ocupam posições correspondentes aos múltiplos de 9. Logo, dos 1000 números com, no máximo, 1000 algarismos, temos $1000/9 \cong 111$ que são divisíveis por 9. A probabilidade de que o número m seja divisível por 9 é de 111/1000, ou 11,1%.

Resposta: A probabilidade de que m seja divisível por nove é igual a 111/1000, ou 11,1%.

Exemplo Acima da Média

a) Para ser divisível por 9, a soma dos algarismos ~~do~~ número precisa ser divisível por 9, logo o primeiro número divisível por 9 é 111.111.111. O sistema não contém nenhum número divisível por 6, pois para ser divisível por 6 precisa ser divisível por 3 e ser par. Os números são todos ímpares já que o último algarismo é sempre 1 (ímpar).

b) divisíveis por 9 = 9 alg, 18 alg., 27 alg, ..., 999 alg

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 9 \\ \hline 10 & 111 \\ 10 & \end{array}$$

TOTAL = 111 números.

$$prob. = \frac{N\ DIV\ 9}{N\ total\ de\ n^{os}} = \frac{111}{1000} = 0,111 = 11,1\%$$

$\boxed{\text{R: A probabilidade de m ser divisível por 9 é de 11,1\%}}$

Exemplo Abaixo da Média

a) 12345679 | 9
11111111

O menor número divisível por 9 é 12345679.

Não há números divisíveis por 6 pois 6 vezes qualquer número não possui unidade igual a 1.

b) O próximo número divisível por 9 é igual a 1012345679, o próximo 101012345679, e assim por diante acressido de 10 na frente.
Números de 8 algarismos, 10, 12, 14...
Nos 100 primeiros (até 100 algarismos) 46 números
Nos 900 (de 100 até 1000) 450 números
São ao total de 516 números divisíveis por 9, com no máximo 1000 algarismos
A probabilidade será de 1000 algarismos − 8 = 992
516/992 = 129/248

Comentários

Questão que mescla conhecimentos simples de divisibilidade e de probabilidade, em um contexto um tanto incomum. A noção de que os números que compõem C, se ordenados, formam uma progressão aritmética também pode ser útil, como mostra a primeira resolução do item **b**. Infelizmente, muitos candidatos erraram a questão por não se lembrarem das regras de divisibilidade aprendidas no ensino fundamental. Outros forneceram a resposta correta, mas sem justificativa (sem dizer que não há número divisível por 6 em C porque esse conjunto não contém números pares, por exemplo). Também houve quem dissesse haver 111,11 números divisíveis por 9 dentre os números de C com até 1000 algarismos, como se fosse possível obter, nesse caso, um número que não fosse inteiro. O exemplo abaixo da média ilustra mais uma ocorrência comum nessa questão: o texto é longo, mas não apresenta qualquer coerência.

7.

A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como $R_\beta = 12 + \log_{10} I$, em que R_β é a medida do ruído, em bels, e I é a intensidade sonora, em W/m^2. No Brasil, a unidade mais usada para medir ruídos é o decibel, que equivale a um décimo do bel. O ruído dos motores de um avião a jato equivale a 160 decibéis, enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge 80 decibéis, que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano.

a)
Escreva uma fórmula que relacione a medida do ruído $R_{d\beta}$, **em decibéis**, com a intensidade sonora I, em W/m^2. Empregue essa fórmula para determinar a intensidade sonora máxima que o ouvido humano suporta sem sofrer qualquer dano.

b)
Usando a fórmula dada no enunciado ou aquela que você obteve no item (a), calcule a razão entre as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
A fórmula para decibéis é $R_{d\beta} = 120 + 10 \log_{10} I$. Como o ouvido humano suporta 80 decibéis, temos $80 = 120 + 10 \log_{10} I$, de modo que $\log_{10} I = (80 - 120)/10 = -4$. Logo, $I = 10^{-4}$ W/m^2.

Resposta: A fórmula para decibéis é $R_{d\beta} = 120 + 10 \log_{10} I$. O ouvido humano suporta, sem sofrer dano, sons com intensidade máxima de 10^{-4} W/m^2.

b) **(2 pontos)**
Para o motor do avião, temos $16 = 12 + \log_{10} I$, donde $\log_{10} I = 4$, ou $I = 10^4$ W/m^2.
Como a intensidade do som do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^{-4} W/m^2, concluímos que a razão entre as intensidades é igual a $R = I_{avião}/I_{esquina} = 10^4/ 10^{-4} = 10^8$.

Resposta: A razão entre as intensidades sonoras do motor do avião e do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^8.

b')
Para o motor do avião, temos $160 = 120 + 10.\log_{10} I_{avião}$, enquanto a equação associada a uma esquina movimentada é $80 = 120 + 10.\log_{10} I_{esquina}$. Assim, $\log_{10} I_{avião} = 4$ e $\log_{10} I_{esquina} = -4$, donde $\log_{10} I_{avião} - \log_{10} I_{esquina} = 8$. Como $\log_{10} I_{avião} - \log_{10} I_{esquina} = \log_{10} (I_{avião} / I_{esquina})$, deduzimos que $\log_{10} (I_{avião} / I_{esquina}) = 8$, de modo que a razão entre as intensidades é igual a $R = I_{avião}/I_{esquina} = 10^8$.

Resposta: A razão entre as intensidades sonoras do motor do avião e do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^8.

Exemplo Acima da Média

a) $R_{d\beta} = 10(12 + \log_{10} I) \Leftrightarrow R_{d\beta} = 120 + 10\log_{10} I$

$80 = 120 + 10\log_{10} I \Leftrightarrow -40 = 10\log_{10} I \Leftrightarrow I = 10^{-4}\ W/m^2$

b) $R_{d\beta} = 120 + 10\log_{10} I \Leftrightarrow 160 = 120 + 10\log_{10} I \Leftrightarrow 40 = 10\log_{10} I \Leftrightarrow$

$I = 10^4\ W/m^2$

Razão $= \dfrac{10^4}{10^{-4}} = 10^8\ W/m^2$

Exemplo Abaixo da Média

a) Como o decibel é um décimo do bel a fórmula fica:

$$R_{dB} = \frac{12 + \log_{10} I}{10}$$

Empregando a expressão acima temos

$$\frac{12+\log_{10} I}{10} \le 80\,dB$$

$$12 + \log_{10} I \le 800$$

$$\log_{10} I \le 788 \Rightarrow \boxed{I = 10^{788}}$$

Resposta: A expressão que relaciona a medida do ruído, ~~com~~ em decibéis, com a intensidade sonora é dada por: $R_{dB} = \frac{12+\log_{10} I}{10}$, e a intensidade sonora máxima que o ouvido humano pode suportar sem prejuízo é, a potência 10^{788}.

B) No motor do avião temos:

$$1600 = 12 + \log_{10} I_A$$

$$\log_{10} I_A = 1588$$

$$I_A = 10^{1588}$$

Já na rua temos,

$$800 = 12 + \log_{10} I_E$$

$$\log_{10} I = 788$$

$$I_E = 10^{788}$$

∴ A relação entre o motor do avião com a esquina de uma cidade sendo é:

$$\frac{I_A}{I_E} = \frac{10^{1588}}{10^{788}} \Rightarrow 10^{800}$$

Resposta: A razão entre o motor do avião com a esquina é de 10^{800}.

Comentários

Essa questão clássica sobre logaritmos revelou, na verdade, que muitos estudantes do ensino médio (e até professores de cursinho) sentem dificuldade ao tratar de outro assunto bem mais simples: a mudança de unidades. Quando convertemos de bel para decibel devemos multiplicar ou dividir por 10 nossa equação? Quem apostou na divisão, pelo fato de o decibel equivaler a 1/10 do bel, errou e perdeu os pontos do item **a**. Para quem estava na dúvida, o melhor era resolver o item **b** usando a fórmula em bels, o que era permitido. Não foi isso, entretanto, o que fez o candidato cuja prova foi escolhida como exemplo abaixo da média. Neste caso, infelizmente, sua nota foi zero.

8.

Sejam dadas as funções f(x) = px e g(x) = 2x + 5, em que p é um parâmetro real.

a)

Supondo que p = –5, determine para quais valores reais de x tem-se f(x).g(x) < 0.

b)

Determine para quais valores de p temos g(x) ≤ f(x) para todo x∈ [–8, –1].

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Se p = –5, f(x) = –5x. Para analisar o sinal de f(x) e g(x), devemos encontrar os zeros dessas funções. Observamos que f(x) = 0 somente se x = 0. A função g(x) também tem um único zero em x = –5/2. Podemos, então, dividir nossa análise do sinal de f(x) e de g(x) nos três intervalos mostrados na tabela abaixo.

Intervalo	f(x)	g(x)
(–∞,–5/2)	positiva	negativa
(–5/2, 0)	positiva	positiva
(0, ∞)	negativa	positiva

O sinal de f(x).g(x) é negativo nos intervalos em que as funções têm sinais opostos, ou seja, em (–∞,–5/2) e em (0, ∞).

Resposta: f(x).g(x) < 0 para x < –5/2 ou x > 0.

a')
Se p = –5, f(x) = –5x. Definindo h(x) = f(x).g(x), temos h(x) = –5x(2x + 5). As raízes de h(x) = 0 são –5/2 e 0. Como o coeficiente do termo quadrático de h(x) é negativo, essa função tem concavidade para baixo. Assim, o sinal de h(x) é negativo em (–∞,–5/2) e em (0, ∞).

Resposta: f(x).g(x) < 0 para x < –5/2 ou x > 0.

b) **(2 pontos)**
Exigir que f(x) e g(x) satisfaçam g(x) ≤ f(x) é equivalente a pedir que h(x) = f(x) – g(x) ≥ 0, ou que h(x) = (p – 2)x – 5 ≥ 0. Para que h(–8) ≥ 0, devemos ter –8p + 11 ≥ 0, ou p ≤ 11/8.
Analisando o ponto x = –1, observamos que h(–1) ≥ 0 se –p – 3 ≥ 0, ou p ≤ –3. Dado o fato de que h(x) é linear, teremos h(x) ≥ 0 em [–8, –1] quando as duas condições acima forem satisfeitas, ou seja, no caso em que p ≤ –3.

Resposta: Teremos g(x) ≤ f(x) para todo p ≤ –3.

Exemplo Acima da Média

a) $p=-5 \rightarrow f(x)=-5x$

$f(x).g(x)<0$

$-5x(2x+5)<0$

$-10x^2-25x<0 \quad \div(-5)$

$2x^2+5x>0$

$2x^2+5x=0 \longrightarrow x(2x+5)=0$

$x=0$ ou $2x+5=0$

$x=-\frac{5}{2}$

$S=\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[\cup \left]0,+\infty\right[$

b) Para $x=-8$ $\quad 2x+5 \leq p.-8$

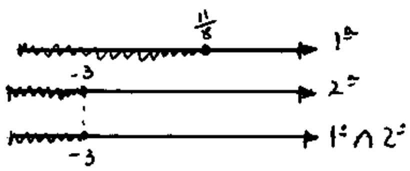
$2.-8+5 \leq -8p$

$p \leq \frac{11}{8}$

Para $x=-1$ $\quad 2.(-1)+5 \leq p.(-1)$

$p \leq -3$

~~Para x=~~



$S=\{p \in \mathbb{R} \,/\, p \leq -3\}$

Exemplo Abaixo da Média

a-) $f(x) \cdot g(x) < 0$

$(-5x) \cdot (2x+5) < 0$

$-10x^2 - 25x < 0$

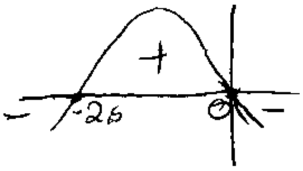
$x(-10x - 25) < 0$

$p = 5$

$-10x^2 - 25x = 0$

$x(-10x - 25) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = -2,5$



$S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < -2,5\}$

x é negativo quando menor do que -2,5 e maior do que 0 (zero)

b-) $2x + 5 \leq +px$

Comentários

Observando o exemplo acima da média, reparamos que o candidato calcula explicitamente h(x) = f(x).g(x), inverte o sinal da desigualdade e faz um gráfico que mostra que –h(x) tem concavidade para cima. Daí, conclui que $x < -5/2$ ou $x > 0$. No item **b**, ele compara as funções nos extremos do intervalo e indica, por meio de um diagrama, que devemos ter $p \leq -3$. Uma resolução clara e sucinta. Já o exemplo abaixo da média mostra um candidato confuso, que escreve $0 < x < -2,5$, um absurdo matemático, e que não é capaz de resolver o item **b**, algo observado com freqüência nesta questão. Claro está que a manipulação de desigualdades é uma das maiores dificuldades dos atuais alunos do ensino médio, motivo pelo qual esse assunto (bem como a lógica a ele inerente) deve ser tratado com mais ênfase nas escolas.

9.

Uma matriz real quadrada P é dita ortogonal se $P^T = P^{-1}$, ou seja, se sua transposta é igual a sua inversa.

a)

Considere a matriz P abaixo. Determine os valores de a e b para que P seja ortogonal. Dica: você pode usar o fato de que $P^{-1}P = \mathbf{I}$, em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

$$P = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & a & -1/3 \\ -2/3 & b & 2/3 \end{bmatrix}$$

b)

Uma certa matriz A pode ser escrita na forma A = QR, sendo Q e R as matrizes abaixo. Sabendo que Q é ortogonal, determine a solução do sistema Ax = b, para o vetor b dado, **sem obter explicitamente a matriz A**. Dica: lembre-se de que $x = A^{-1}b$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como P é ortogonal, $P^{-1}P = P^T P = \mathrm{I}$. Para obter os valores de a e b, basta multiplicar, por exemplo, a segunda linha de P^T pela primeira coluna de P, igualando o resultado ao elemento da 2ª linha e 1ª coluna de I, que é 0, e multiplicar a segunda linha de P^T pela terceira coluna de P, igualando o resultado ao elemento da 2ª linha e 3ª coluna de I, que também é 0. Nesse caso, temos

$$\begin{array}{rcl} (-2/3)(-1/3) + a(-2/3) + b(-2/3) & = & 0 \\ (-2/3)(-2/3) + a(-1/3) + b(2/3) & = & 0 \end{array}.$$

Multiplicando a primeira equação por –3/2 e a segunda equação por –3, e isolando os termos constantes, obtemos o novo sistema linear

$$\begin{array}{rrcl} a & +b & = & 1/3 \\ a & -2b & = & 4/3 \end{array},$$

cuja solução é a = 2/3 e b = –1/3.

Resposta: a = 2/3 e b = –1/3.

a')

Como P é ortogonal, $PP^{-1} = PP^T = \mathrm{I}$. Para obter os valores de a e b, basta multiplicar, por exemplo, a primeira linha de P pela segunda coluna de P^T, igualando o resultado ao elemento da 1ª linha e 2ª coluna de I, que é 0, e multiplicar a primeira linha de P pela terceira coluna de P^T, igualando o resultado ao elemento da 1ª linha e 3ª coluna de I, que também é 0. Nesse caso, temos

$$\begin{array}{rcl} (-1/3)(-2/3) + (-2/3)a + (-2/3)(-1/3) & = & 0 \\ (-1/3)(-2/3) + (-2/3)b + (-2/3)(2/3) & = & 0 \end{array}.$$

Da primeira equação, obtemos 4/9 – (2/3)a = 0, ou a = 2/3. A segunda equação equivale a –2/9 – (2/3)b = 0, que implica em b = –1/3.

Resposta: a = 2/3 e b = –1/3.

b) **(2 pontos)**

Como $x = A^{-1}b$ e $A = QR$, temos $x = (QR)^{-1}b = R^{-1}Q^{-1}b$. Dado o fato de Q ser ortogonal e R ser diagonal, temos:

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Calculando $y = Q^T b$, obtemos:

$$y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, encontramos x através do produto:

$$x = R^{-1}y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $x = [1\ 1\ -4]^T$.

Exemplo Acima da Média

a) $P^{-1} = P^{T} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & a & b \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} & \frac{2}{9}-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b & \frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9}-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b & \frac{4}{9}+a^2+b^2 & \frac{4}{9}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b \\ \frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9} & \frac{4}{9}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b & \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b = 0 \qquad \frac{4}{9}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b = 0 \qquad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = 2/3 \\ b = -1/3 \end{array} \right.$$

$$\frac{4}{9}+a^2+b^2 = 1$$

b) $A = QR \Rightarrow A^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo Abaixo da Média

a) $P^{T} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & a & b \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} a' & b' & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & a & -1/3 \\ -2/3 & b & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

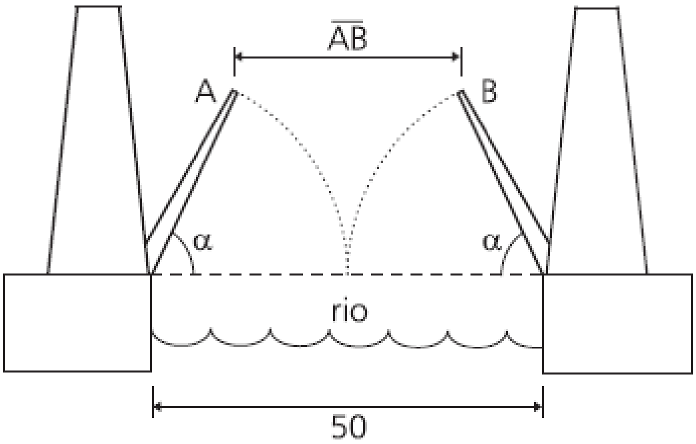
$$\left\{ \begin{array}{l} a-b-c = 6 \rightarrow \boxed{c=-6} \\ a+b+c = -2 \longrightarrow 2a-6 = -2 \Rightarrow 2a = 4 \therefore \boxed{a=b=2} \\ \sqrt{2}a-\sqrt{2}b = 0 \rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{2}b \therefore a = b \end{array} \right. \qquad R: x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Comentários

Alunos do ensino médio costumam aprender a transpor e a inverter matrizes sem um propósito específico. Nesta questão, a transposição e a inversão são utilizadas para a solução de um sistema linear através de um método prático baseado na decomposição da matriz A no produto QR, em que Q é uma matriz ortogonal. Como se observa, a solução não era difícil de obter. Entretanto, a falta do hábito de manipular matrizes fez com que a maioria dos candidatos nem sequer respondesse à questão. O exemplo acima da média mostra uma resolução na qual todos os coeficientes de $P^{-1}P$ foram obtidos, o que era trabalhoso e desnecessário. Além disso, o candidato não indicou como obteve R^{-1}, o que seria aconselhável. Mesmo assim, a resolução está suficientemente clara. No exemplo abaixo da média, o candidato simplesmente ignora boa parte do enunciado. No item **a**, ele não percebe que $P^{-1} = P^T$, apesar de isso ter sido informado. Em seguida, no item **b**, tenta formar A explicitamente, o que não era permitido. Muitos candidatos também cometeram erros ao inverter ou transpor as matrizes, não tendo sido incomum observar respostas que continham a expressão $(QR)^{-1} = Q^{-1}R^{-1}$. Outros tentaram obter os coeficientes a e b usando determinantes, o que não era indicado nesse caso.

10.

Uma ponte levadiça, com 50 metros de comprimento, estende-se sobre um rio. Para dar passagem a algumas embarcações, pode-se abrir a ponte a partir de seu centro, criando um vão $\overline{AB}$, conforme mostra a figura abaixo. Considerando que os pontos A e B têm alturas iguais, não importando a posição da ponte, responda às questões abaixo.

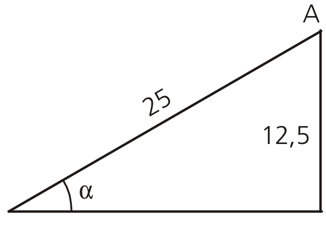


a)
Se o tempo gasto para girar a ponte em 1º equivale a 30 segundos, qual será o tempo necessário para elevar os pontos A e B a uma altura de 12,5 m, com relação à posição destes quando a ponte está abaixada?

b)
Se α = 75º, quanto mede $\overline{AB}$?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Como os pontos A e B estão sempre à mesma altura, basta determinarmos o tempo gasto para elevar um dos pontos. Tomemos, então, o ponto A. Como a ponte tem 50 m de comprimento e divide-se ao meio, cada parte elevada tem 25 m. A figura ao lado ilustra a situação na qual temos o ponto A a 12,5 m de altura. Nela constatamos que o ângulo α que o vão da ponte faz com a horizontal é tal que sen(α) = 12,5/25 = 1/2. Assim sendo, α = 30º.
Se o tempo gasto para girar a ponte em 1º é 1/2 minuto, para girá-la em 30º, consomem-se 30x(1/2) = 15 minutos.



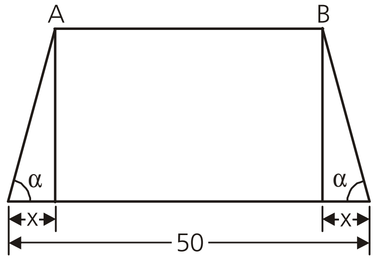
Resposta: Gastam-se 15 minutos para girar a ponte até que os pontos A e B estejam a 12,5 m de altura.

b) **(2 pontos)**

A figura ao lado mostra a posição da ponte quando $\alpha = 75°$. Observa-se que $x = 25.\cos(75)$. Usando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, obtemos

$$\cos(75°) = \cos(45°).\cos(30°) - \text{sen}(45°).\text{sen}(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

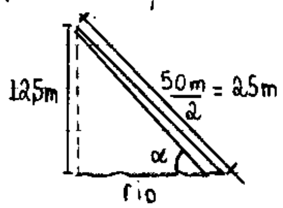
Logo, $\overline{AB} = 50 - 2x = 50 - 50\cos(75°) = 50\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right]$.



Resposta: $\overline{AB} = 50\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right]$**.**

Exemplo Acima da Média

a) Na situação descrita, temos o triângulo a seguir:



$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2}$

Logo, $\alpha = 30°$ → Temos, portanto:

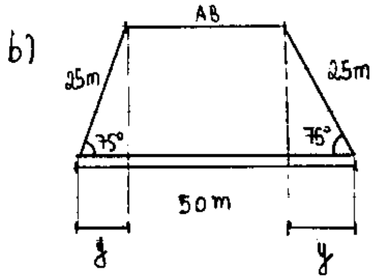
1° —— 30 s

30° —— x

x = 900 s

$\boxed{\text{R: O tempo será de 900 s.}}$

b)



A representação ao lado faz parte da resolução.

$\cos 75° = \frac{\text{cateto adj.}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{25}$ (1)

$y = \frac{25(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

↳ $\overline{AB} = 50 - 2\cdot\left(\frac{25(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\right) = 50 - \frac{25(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$

$\overline{AB} = \frac{100 - 25(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} = \boxed{\frac{25(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}}$

(1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

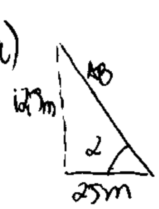
$\cos(30°+45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen}\,30° \cdot \text{sen}\,45°$

$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{\text{R: } \overline{AB} \text{ mede } \frac{25(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}}$

Exemplo Abaixo da Média

a)



$\text{tg}\,\alpha = \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2}$

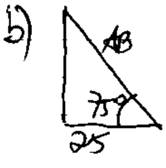
$\therefore \alpha \cong 45°$

1° —— 30 s

45° —— t

t = 1350 s

b)



$\cos 75° = \frac{25}{AB}$

$\cos(30+45) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{25}{AB}$

$100 = \sqrt{6}AB - \sqrt{2}AB$

$100 = \sqrt{4}AB$

$AB = 6,25\,m$

$\cos(30+45) = \cos 30 \cos 45 - \text{sen}\,30\,\text{sen}\,45$

$\cos(30+45) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1\sqrt{2}}{2\cdot 2}$

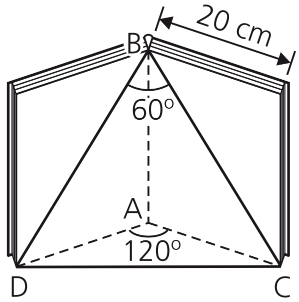
$\cos(30+45) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comentários

Uma questão simples e aplicada de trigonometria, envolvendo ângulos conhecidos, como 30º e 75º. O exemplo abaixo da média mostra uma resposta na qual o seno foi confundido com a tangente e o vão AB tornou-se a hipotenusa de um triângulo retângulo. Além de cometerem erros dessa natureza, muitos candidatos tiveram dificuldade em manipular raízes quadradas, escrevendo expressões tais como $\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{4}$, ou $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}$. Dificuldades no cálculo de cos(75º) ou de sen(75º) também foram freqüentes. Apesar disso, a maioria acertou ao menos o item **a**.

11.

Suponha que um livro de 20 cm de largura esteja aberto conforme a figura abaixo, sendo $D\hat{A}C=120^\circ$ e $D\hat{B}C=60^\circ$.



a)
Calcule a altura $\overline{AB}$ do livro.

b)
Calcule o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, 20 cm, de modo que o triângulo ACD é isósceles. Assim, $A\hat{D}C = A\hat{C}D = (180-120)/2 = 30°$. Pela lei dos senos, temos $sen(C\hat{A}D)/\overline{CD} = sen(A\hat{D}C)/\overline{AC}$. Isolando $\overline{CD}$ nessa equação, encontramos:

$$\overline{CD} = sen(C\hat{A}D)\cdot\overline{AC}/sen(A\hat{D}C) = sen(120°)\cdot 20/sen(30) = (20\sqrt{3}/2)/[1/2] = 20\sqrt{3}.$$

Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

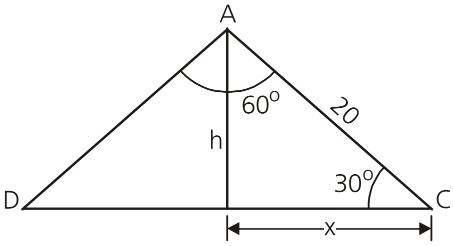
a')
Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, 20 cm. Assim, pela lei dos cossenos, temos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\cos(120°) = 400 + 400 - 2.20.20.(-1/2) = 1200.$$

Logo, $\overline{CD} = 20\sqrt{3}$.
Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

a'')



Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, de modo que o triângulo ACD é isósceles. Assim, $A\hat{C}D = (180-120)/2 = 30°$. Observando a figura ao lado, concluímos que
x = 20 cos(30°) = $10\sqrt{3}$, o que implica que $\overline{CD} = 2x = 20\sqrt{3}$.
Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC}$ = $\overline{BD}$ = $\overline{CD}$ $= 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

b) **(2 pontos)**

A área da base do tetraedro é igual a $A_B = \frac{\overline{CD}\cdot h}{2} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AC}\cdot \text{sen}(30°)}{2} = \frac{20\sqrt{3}\cdot 20\cdot(1/2)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm².

Logo, o volume do tetraedro é $\frac{1}{3}A_B\cdot\overline{AB} = \frac{1}{3}100\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{2} = \frac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

Resposta: O tetraedro tem um volume de $\frac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

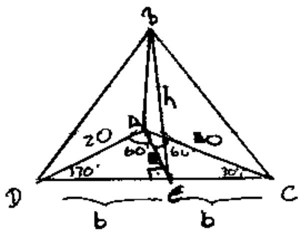
b')

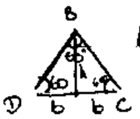
A área da base do tetraedro é igual a $A_B = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot sen(120°)}{2} = \frac{20\cdot 20\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm².

Logo, o volume do tetraedro é $\frac{1}{3}A_B\cdot\overline{AB} = \frac{1}{3}100\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{2} = \frac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

Resposta: O tetraedro tem um volume de $\frac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

Exemplo Acima da Média



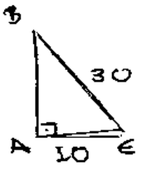


Δ DBC possui altura equivalente a:
$h = \frac{2b\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = b\sqrt{3} \Leftrightarrow \boxed{h = 30 \text{ cm}}$
$h = \overline{BE}$

$\cos 30 = \frac{b}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{b = 10\sqrt{3} \text{ cm}}$
$\overline{DE} = \overline{EC} = b$

$\text{sen } 30 = \frac{\overline{AE}}{20} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\overline{AE} = 10 \text{ cm}}$

Pelo triângulo ABE, temos:



$\overline{AB}^2 + 100 = 900$
$\overline{AB}^2 = 800$
$\boxed{\overline{AB} = 20\sqrt{2} \text{ cm}}$

$\therefore \overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm

b) $V_{ABCD} = \frac{A_{base}\cdot\overline{AB}}{3} \Leftrightarrow \frac{2b\cdot\overline{AE}}{2\cdot 3}\cdot\overline{AB} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}\cdot 10\cdot 20\sqrt{2}}{3} = \frac{2000\sqrt{6}}{3}$

∴ O volume do tetraedro é $\frac{2000\sqrt{6}}{3}$ cm³.

Exemplo Abaixo da Média

a) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 120$

$c^2 = 800 + 400$

$c = 20\sqrt{3}$

$A = \overline{AC}$

$B = \overline{AD}$

$c = \overline{CD}$

$(20\sqrt{3})^2 = x^2 + (20)^2$

$1200 = x^2 + 400$

$\boxed{x = 20\sqrt{2}}$

A altura é $20\sqrt{2}$ cm

b) $V = \frac{b \cdot h}{3}$

$b: 400 = 300 + x^2$

$x = 10$

$V = \frac{100\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{2}}{3}$

$b = \frac{20\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3}$ cm^2

$V = \frac{2000\sqrt{6}}{3}$ cm^3

Comentários

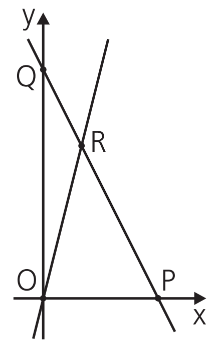
Essa é uma questão relativamente difícil, que envolve geometria plana e espacial e um pouco de trigonometria. O exemplo acima da média mostra uma maneira interessante de se obter a altura do livro a partir da altura do triângulo DCB, um caminho não explorado nas respostas esperadas citadas acima. Com a determinação de AE no item **a**, o cálculo do volume do tetraedro, no item **b**, foi facilitado. Já no exemplo abaixo da média, o candidato usa uma fórmula errada da lei dos cossenos e, depois de cometer outro erro, aparentemente de sinal, chega a um valor correto para a altura do livro. Naturalmente, com esse erro duplo, o candidato não obteve os pontos correspondentes ao item **a**. Deve-se observar, também, que a notação usada não é clara, pois não há qualquer indicação do que x representa tanto no item **a**, como no item **b**. Assim, fica difícil entender a origem e o propósito da equação $400 = 300 + x^2$, cuja solução é usada no cálculo da área da base do tetraedro.

12.

As retas de equações $y = ax + b$ e $y = cx$ são ilustradas na figura abaixo. Sabendo que o coeficiente b é igual à média aritmética dos coeficientes a e c,

a)
Expresse as coordenadas dos pontos P, Q e R em termos dos coeficientes a e b;

b)
Determine a, b e c sabendo que a área do triângulo OPR é o dobro da área do triângulo ORQ e que o triângulo OPQ tem área 1.



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
O ponto R está na interseção das duas retas, de modo que sua abscissa satisfaz ax + b = cx. Mas b = (a + c)/2, de modo que c = 2b – a, o que implica que ax + b = (2b – a)x, ou x = b/(2b – 2a). Usando y = cx, temos y = (2b – a)b/(2b – 2a).
O ponto P está sobre as retas y = ax + b e y = 0, de modo que sua abscissa é –b/a. Já o ponto Q está sobre as retas y = ax + b e x = 0, de modo que sua ordenada é b.

Resposta: As coordenadas são P(–b/a, 0), Q(0, b) e R(b/(2b – 2a), (2b – a)b/(2b – 2a)).

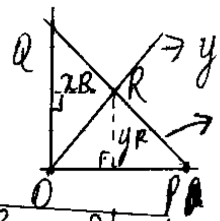
b) **(2 pontos)**
A área do triângulo OPQ, que vale 1, é igual à soma das áreas dos triângulos OPR e ORQ . Assim, como A_{OPR} = $2A_{ORQ}$, temos A_{ORQ} + $2A_{ORQ}$ = 1, ou A_{ORQ} = 1/3. Logo, A_{OPR} = 2/3.
Uma vez que $A_{ORQ} = \overline{OQ} \cdot R_x / 2 = b^2/[2(2b-2a)] = 1/3$, temos $3b^2 = 4(b – a)$.
Da mesma forma, $A_{OPR} = \overline{OP} \cdot R_y / 2 = -(b/a)\cdot(2b-a)b/[2\cdot(2b-2a)] = 2/3$, donde $–3b^2(2b – a) = 8a(b – a)$.
Substituindo o termo $3b^2$ por 4(b – a) nessa última equação, obtemos a – 2b = 2a, ou a = –2b. Assim, $3b^2$ = 4(b – (–2b)) = 12b, ou 3b(b – 4) = 0. Como b ≠ 0, temos b = 4, donde a = –8 e c = 2b – a = 16.

Resposta: a = –8, b = 4 e c = 16.

b')
A área do triângulo OPQ vale 1, de modo que $\frac{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)b = 1$. Assim, $a = -\frac{b^2}{2}$.
Como $A_{OPR} = 2A_{ORQ}$, temos $\frac{\overline{OP}\cdot R_y}{2} = 2\frac{\overline{OQ}\cdot R_x}{2}$, ou $\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{(2b-a)b}{2b-2a}\right) = b\left(\frac{b}{2b-2a}\right)$.
Desta equação, concluímos que (2b – a) = –2a, ou a = –2b.
Juntando esses dois resultados, obtemos $2b = b^2/2$, ou b = 4. Daí, a = –8, e c = 2b – a = 16.

Resposta: a = –8, b = 4 e c = 16.

Exemplo Acima da Média



$\rightarrow y = cx = (2b-a)x$

$\rightarrow y = ax + b$

$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b-a$

a) Ponto Q ⇒ $x = 0$

$y = a.0 + b = b$ $Q(0, b)$

$\boxed{Q(0,b)}$

Ponto P ⇒ $y = 0$

$0 = ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ $P(-\frac{b}{a}, 0)$

Ponto R ⇒ $ax + b = cx$ $\Rightarrow x = \frac{b}{2(b-a)} \Rightarrow y = (2b-a)x = \frac{(2b-a)b}{2(b-a)}$

$ax + b = 2bx - ax$

$R\left(\frac{b}{2(b-a)}, \frac{(2b-a)b}{2(b-a)}\right)$

b) $A_{OPR} = 2A_{ORQ}$

$\frac{yR \cdot xP}{2} = xR \cdot yQ$ $\rightarrow$

$\frac{(2b-a)b}{2(b-a)} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{2 \cdot b \cdot b}{2(b-a)}$

$a = -2b$ (1)

$A_{OQP} = 1$

$\frac{b \cdot \frac{-b}{a}}{2} = 1 \rightarrow$

$-b^2 = 2a$ (2)

$\boxed{a = -8 \quad b = 4 \quad c = 16}$

Relacionando 1 e 2.

$2a = -4b$

$2a = -b^2 \Rightarrow b^2 = 4b \ (b \neq 0)$

$b = 4$

$\Rightarrow a = -8$

$c = (2b - a) = 2.4 + 8 = 16 \Rightarrow c = 16$

Exemplo Abaixo da Média

a) Para P:

$y = ax + b$

$0 = ax + b$

obs: a é negativo pois a reta é decrescente

$-ax = -b$

$\boxed{x = \frac{b}{a}}$

$\therefore P\left(\frac{b}{a}; 0\right)$

Para Q:

$y = ax + b$

$\boxed{y = b}$

$\therefore Q(0; b)$

Para R:

$ax + b = cx$

$ax + b = \left(\frac{2b}{a}\right)x$

$\boxed{x = \frac{-b}{a - \frac{2b}{a}}}$

$\therefore R\left(\frac{-b}{a - \frac{2b}{a}}; Y\right)$

b) ΔOPQ: $\frac{b}{a} \cdot b = 1$

$\boxed{\frac{b^2}{a} = 1}$ I

$A_{\Delta OPR} = 2 \cdot A_{\Delta OPQ}$

$\frac{b}{a} \cdot y = 2\left(b \cdot \frac{-b}{a - \frac{2b}{a}}\right)$

Comentários

Nessa questão de geometria analítica, o item **a** é fácil, enquanto o item **b** é difícil. O exemplo acima da média mostra uma resolução correta, porém pouco clara. Observe que, no item **b**, o candidato deveria ter posto o termo –b/a entre parênteses, para que não confundíssemos b.(–b/a) = 1 com b – b/a = 1. Além disso, não é fácil descobrir onde estão as respostas dos ìtens. No exemplo abaixo da média, o candidato encontra, sem indicar como, um resultado incorreto para o valor de c, o que o leva a obter uma abscissa errada para R. A ordenada desse ponto também não foi fornecida, assim como há um erro de sinal na abscissa de P. Com tantas manipulações algébricas erradas no item **a**, não se poderia esperar que o item **b** estivesse correto. Outros erros comumente encontrados incluem a representação de pontos no plano cartesiano através de um único valor, em lugar de um par ordenado, e a determinação das coordenadas de P, Q e R em função de c, algo proibido pelo enunciado. A correção da questão também evidenciou que muitos alunos do ensino médio não conseguem distinguir as variáveis x e y dos coeficientes fixos a, b e c. Finalmente, cabe ressaltar que, apesar de correto, o cálculo das áreas dos triângulos através do uso de determinantes tornava ainda mais difícil a obtenção da solução, não sendo indicado neste caso.